

Modelado diferencial y análisis computacional de sólidos solubles durante la dilución del jugo de maracuyá

Differential Modeling and Computational Analysis of Soluble Solids During Passion Fruit Juice Dilution

Guilber Vergara Vélez ^{1*}, Fabián Redrován Castillo ¹, Bertha Mazón Olivo ¹
Wilmer Rivas Asanza ¹, Johnny Novillo Vicuña ¹

¹ Universidad Técnica de Machala, Ecuador.

* Autor de Correspondencia: gvergara2@utmachala.edu.ec

Resumen: La aplicación de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en ingeniería de alimentos permite modelar procesos experimentales y analizar sus tasas de cambio. Este estudio formula y evalúa un modelo diferencial de primer orden para describir la variación de sólidos solubles aparentes, expresados en grados Brix (°Brix) refractométricos, durante la dilución de jugo de maracuyá (*Passiflora edulis*) con agua. Se analizaron 18 observaciones, correspondientes a volúmenes de 50 a 135 mL, en incrementos de 5 mL y a temperaturas de 23,0 a 24,5 °C. Se planteó una tasa relativa de disminución integrada por un término inversamente proporcional al volumen y otro linealmente dependiente del volumen añadido. Mediante separación de variables se obtuvo una solución analítica explícita, calibrada por mínimos cuadrados no lineales y contrastada con una referencia ideal de dilución y modelos empíricos alternativos. El modelo alcanzó $R^2 = 0,996677$ y una raíz del error cuadrático medio (RMSE) de 0,171322 °Brix, frente a 0,704587 °Brix de la referencia ideal, equivalente a una reducción del 75,7 %. Asimismo, obtuvo un RMSE 21,5 % inferior al del modelo exponencial cuadrático. La solución permitió demostrar positividad y monotonía e identificar un máximo interior del índice matemático volumen $\times$ °Brix cercano a 70,6 mL. El análisis residual reveló dependencia serial, lo que restringe la inferencia y la capacidad predictiva. La formulación ofrece una representación matemática y computacional reproducible de la relación experimental volumen - °Brix y contribuye metodológicamente al estudio de diluciones en matrices alimentarias.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales ordinarias; modelado computacional; refractometría; sólidos solubles aparentes; dilución; maracuyá.

Abstract: The application of ordinary differential equations (ODEs) in food engineering enables the modeling of experimental processes and the analysis of their rates of change. This study develops and evaluates a first-order differential model to describe variations in apparent soluble solids, expressed in refractometric degrees Brix (°Brix), during the dilution of passion fruit juice (*Passiflora edulis*) with water. A total of 18 observations were analyzed, covering volumes ranging from 50 to 135 mL in 5 mL increments, at temperatures between 23.0 and 24.5 °C. A relative rate of decrease was proposed, comprising a term inversely proportional to volume and another linearly dependent on the volume added. An explicit analytical solution was obtained through separation of variables, calibrated using nonlinear least squares, and compared with an ideal dilution reference model and alternative empirical models. The proposed model achieved $R^2 = 0.996677$ and a root mean square error (RMSE) of 0.171322 °Brix, compared with 0.704587 °Brix for the ideal reference model, representing a 75.7% reduction. Furthermore, its RMSE was 21.5% lower than that of the quadratic exponential model. The analytical solution established positivity and monotonicity and identified an interior maximum of the mathematical volume $\times$ °Brix index at approximately 70.6 mL. Residual analysis revealed serial dependence, limiting statistical inference and predictive capability. The proposed formulation provides a reproducible mathematical and computational representation of the experimental volume - °Brix relationship and offers a methodological contribution to the study of dilution processes in food matrices.

Keywords: ordinary differential equations; computational modeling; refractometry; apparent soluble solids; dilution; passion fruit.

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) permiten representar procesos mediante tasas de cambio y condiciones iniciales. En ingeniería de alimentos, el modelado matemático integra observaciones experimentales y simulación computacional para analizar transformaciones físicas y atributos de calidad (Datta, 2008; Farid, 2010; Ho et al., 2013; Rauh & Delgado, 2015; Trystram, 2012). Su aplicación comprende fenómenos de transferencia, secado, mezclado y procesamiento alimentario (Chen et al., 2026; van Boekel, 2008). En modelos con parámetros desconocidos, los mínimos cuadrados no lineales y el diagnóstico residual permiten evaluar la adecuación del ajuste (Bates & Watts, 1988; Heckert et al., 2002; Seber & Wild, 1989).

En procesos de dilución, los balances de materia constituyen referencias físicas; sin embargo, los grados Brix (°Brix) determinados mediante refractometría representan una equivalencia convencional de sacarosa, cuya interpretación depende de la composición y las condiciones de medición (ISO, 2003; Reid, 2003). El estándar Codex CXS 247-2005 establece criterios de identidad y calidad de los jugos, sin definir leyes diferenciales de dilución. En el maracuyá (*Passiflora edulis*), la presencia de azúcares, ácidos y otros compuestos evidencia la complejidad de su matriz alimentaria (Fonseca et al., 2022; Senter et al., 1993; Viera et al., 2020). Por tanto, las desviaciones respecto de una dilución ideal no demuestran necesariamente pérdida de masa, sino que requieren distinguir entre ajuste matemático y explicación fisicoquímica.

La comparación de modelos debe considerar indicadores de ajuste, residuos y limitaciones experimentales, especialmente con muestras pequeñas (Burnham & Anderson, 2002; Hurvich & Tsai, 1989; Hyndman & Koehler, 2006). Cuando las observaciones siguen un orden secuencial, la evaluación predictiva debe respetar dicha estructura (Bergmeir et al., 2018). Asimismo, herramientas computacionales como NumPy, SciPy y Matplotlib facilitan la estimación paramétrica y la reproducibilidad del análisis (Harris et al., 2020; Hunter, 2007; Virtanen et al., 2020).

Brecha científica y novedad metodológica. Las investigaciones sobre maracuyá han utilizado los sólidos solubles principalmente para caracterización, formulación y

predicción de propiedades fisicoquímicas. Bautista Vega y Olivares Muñoz (2022) analizaron diluciones de néctar mediante evaluaciones fisicoquímicas y sensoriales, mientras que Assawarachan y Tantikul (2025) modelaron la conductividad eléctrica del jugo considerando temperatura y sólidos solubles durante el calentamiento óhmico. Sin embargo, entre los antecedentes examinados no se identificó una EDO que emplee el volumen total como variable independiente para describir directamente la trayectoria volumen-°Brix durante la dilución del jugo de maracuyá.

En este contexto, el presente estudio tiene como objetivo formular, resolver y evaluar computacionalmente una EDO de primer orden para representar la disminución de los sólidos solubles aparentes durante la dilución del jugo de maracuyá. El modelo considera una tasa relativa de disminución compuesta por un término inversamente proporcional al volumen y otro dependiente del volumen añadido. Su solución analítica se calibra mediante mínimos cuadrados no lineales y se compara con una referencia ideal y modelos empíricos alternativos, evaluando sus propiedades matemáticas, errores y residuos. La contribución se plantea como una representación fenomenológica reproducible dentro del intervalo experimental, sin atribuirle el carácter de ley física universal ni de mecanismo fisicoquímico demostrado.

2. Metodología

2.1. Matriz alimentaria y serie experimental

El experimento comprendió 18 niveles de volumen total, desde 50 hasta 135 mL, obtenidos mediante incrementos sucesivos de 5 mL de agua, con registros efectuados entre 0 y 85 min. Se realizaron tres preparaciones y trayectorias de dilución independientes. Se obtuvieron 54 lecturas individuales de °Brix, 54 de temperatura y 54 de tiempo, organizadas en tres mediciones por nivel, además de sus 18 promedios respectivos. El volumen se registró por nivel. La curva central se ajustó a las 18 medias de °Brix y la dispersión intranivel se resumió mediante desviaciones estándar muestrales ($n=3$). Como los niveles sucesivos pertenecen a trayectorias de dilución, las mediciones dentro de cada trayectoria se consideran observaciones repetidas y no unidades independientes entre sí.

2.2. Instrumentación refractométrica: identificación y especificaciones

El refractómetro digital identificado en la ficha comercial es Hanna Instruments, modelo HI96800, para índice de refracción y Brix. El fabricante declara un intervalo de 0,0-85,0 % Brix, resolución de 0,1 % Brix y exactitud especificada de $\pm 0,2$ % Brix (a 25 °C). Los intervalos de índice de refracción son 1,3300 - 1,5080 nD y 1,3330 - 1,5040 nD₂₀, con resolución de 0,0001 y exactitud de $\pm 0,0005$ para ambos modos. El rango de temperatura es 0 - 80 °C, resolución de 0,1 °C y exactitud de $\pm 0,3$ °C. La compensación automática opera entre 10 y 40 °C; tiempo nominal de lectura, 1,5 s; volumen mínimo de muestra, 100 μ L. Estos datos son especificaciones del fabricante, no resultados de calibración propios.

Los registros de 3,2–13,5 °Brix y 23,0 - 24,5 °C se encuentran dentro de los rangos nominales del refractómetro HI96800. La resolución de 0,1 °Brix y la exactitud especificada por el fabricante de $\pm 0,2$ °Brix a 25 °C son compatibles con la escala de las mediciones reportadas. La exactitud térmica declarada es $\pm 0,3$ °C. Estas especificaciones instrumentales se consideran al interpretar diferencias pequeñas entre lecturas y no sustituyen la evaluación de repetibilidad experimental.

Las especificaciones técnicas del refractómetro HI96800 fueron contrastadas con la documentación oficial del fabricante (Hanna Instruments, 2026). La medición de sólidos solubles se interpreta conforme al principio refractométrico y al marco metodológico de ISO 2173:2003.

Tabla 1. Datos experimentales de la dilución con agua del jugo de maracuyá.

Volumen (mL)	Tiempo (min)	Temperatura (°C)	°Brix (media de 3 réplicas)
50	0	23,0	13,5
55	5	23,5	12,5
60	10	23,3	11,5
65	15	23,6	10,5
70	20	23,9	10,0
75	25	24,0	9,2

80	30	23,7	8,7
85	35	24,2	8,2
90	40	23,8	7,7
95	45	23,9	7,2
100	50	24,2	6,7
105	55	24,3	6,2
110	60	24,0	5,7
115	65	23,9	5,2
120	70	24,5	4,7
125	75	24,4	4,2
130	80	23,8	3,7
135	85	24,5	3,2

2.3. Variables, unidades y referencia ideal

Se definió V como volumen total (mL), B(V) como lectura de sólidos solubles aparentes (°Brix), $V_0 = 50$ mL y $B_0 = 13,5$ °Brix. El tiempo satisface, numéricamente y con unidades explícitas, $V(t) = 50 \text{ mL} + (1 \text{ mL/min})t$. La temperatura se conservó como registro descriptivo; su variación estrecha y su covariación con el volumen impiden identificar un efecto independiente confiable.

La referencia ideal simplificada es:

$$B_{\text{ideal}}(V) = B_0 \frac{V_0}{V} = \frac{675}{V} \quad (1)$$

Esta ecuación se presenta como hipótesis de proporcionalidad, no como balance de masa exacto para lecturas refractométricas.

2.4. Ajuste y evaluación

Se estimaron los parámetros positivos por mínimos cuadrados no lineales en la escala original de °Brix, manteniendo fija la condición inicial. La función objetivo fue la suma de cuadrados de residuos:

$$SSE = \sum_{i=1}^n [B_{obs}(V_i) - B_{mod}(V_i; \alpha, k)]^2$$

El ajuste se realizó sin linealización logarítmica, de modo que el error optimizado permaneció en unidades instrumentales. Dada la muestra pequeña y la autocorrelación residual, las comparaciones entre modelos y los criterios de información se interpretan descriptivamente, sin atribuir validez inferencial a supuestos de independencia no verificados.

$$SSE(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{18} [B_i - \hat{B}(V_i; \boldsymbol{\theta})]^2, \quad \boldsymbol{\theta} = (\alpha, k) \quad (2)$$

Se reportaron:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_i - \hat{B}_i)^2}, \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_i (B_i - \hat{B}_i)^2}{\sum_i (B_i - \bar{B})^2} \quad (3)$$

Se compararon cinco modelos sobre idénticas observaciones. Se reservó la cola de la serie en tres particiones cronológicas de entrenamiento/prueba (12/6, 14/4 y 15/3). La evaluación por origen progresivo evita incorporar observaciones posteriores en la calibración de las anteriores y es coherente con la naturaleza ordenada de la serie; estos resultados no se interpretan como validación externa (Bergmeir et al., 2018). Se examinaron los residuos frente al volumen y se calculó el estadístico de Durbin–Watson como diagnóstico descriptivo de dependencia serial (Durbin y Watson, 1951; NIST/SEMATECH, 2002). No se emplearon intervalos de confianza convencionales bajo independencia no demostrada. Bates y Watts (1988), Seber y Wild (1989) y Marquardt (1963) sustentan el enfoque de regresión no lineal y mínimos cuadrados.

2.5. Entorno de programación y reproducibilidad

El procesamiento computacional se realizó en Python 3.13.1, utilizando NumPy 2.2.1, SciPy 1.14.1, pandas 2.2.3, Matplotlib 3.10.0, statsmodels 0.14.4 y SymPy 1.13.3. NumPy, SciPy y Matplotlib proporcionaron las herramientas de cálculo numérico, optimización y representación gráfica empleadas en el análisis (Harris et al., 2020; Hunter, 2007; Virtanen et al., 2020). Las versiones de las bibliotecas se documentaron para favorecer la reproducibilidad del análisis numérico y gráfico.

La reproducción computacional del ajuste se efectuó mediante la función `scipy.optimize.least_squares`, minimizando la suma de los cuadrados de las diferencias entre las 18 mediciones experimentales de °Brix y las predicciones del modelo. Se establecieron restricciones de no negatividad para los parámetros, una condición inicial de $B(50) = 13,5$ y valores iniciales de $\alpha = 0,8$ y $k = 0,00015 \text{ mL}^{-2}$. El código de reproducción incluye los datos experimentales, la ecuación diferencial, las restricciones de los parámetros, los indicadores de ajuste y los procedimientos para generar las representaciones gráficas.

3. Desarrollo y resolución completa del modelo diferencial

3.1. Construcción de la tasa de cambio

Se postula una disminución relativa de la lectura refractométrica durante el proceso de dilución volumétrica mediante adición de agua.

$$-\frac{1}{B} \frac{dB}{dV} = \frac{\alpha}{V} + k(V - V_0), \quad V \geq V_0, \quad \alpha > 0, \quad k > 0 \quad (4)$$

El primer término representa una contribución inversa al volumen y el segundo es una corrección fenomenológica asociada al volumen agregado; ninguno debe interpretarse como mecanismo molecular demostrado. Las dimensiones son $[\alpha] = 1$ (adimensional) y $[k] = \text{mL}^{-2}$.

3.2. Separación de variables e integración definida

$$\frac{dB}{B} = - \left[\frac{\alpha}{V} + k(V - V_0) \right] dV \quad (5)$$

Integrando con condiciones iniciales:

$$\int_{B_0}^{B(V)} \frac{d\xi}{\xi} = - \int_{V_0}^V \left[\frac{\alpha}{u} + k(u - V_0) \right] du \quad (6)$$

Evaluando las primitivas:

$$\ln \left(\frac{B(V)}{B_0} \right) = -\alpha \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) - \frac{k}{2} (V - V_0)^2 \quad (7)$$

Aplicando exponencial y sustituyendo la condición inicial:

$$B(V) = B_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\alpha \exp\left[-\frac{k}{2}(V - V_0)^2\right] \quad (8)$$

Con $\alpha = 0,768928$ y $k = 0,000158887 \text{ mL}^{-2}$:

$$\hat{B}(V) = 13,5 \left(\frac{50}{V}\right)^{0,768927} \exp[-0,0000794435(V - 50)^2] \quad (9)$$

3.3. Primera derivada y monotonía

Definimos $q(V) = \alpha/V + k(V - V_0)$. Derivando la solución:

$$B'(V) = -q(V)B(V) \quad (10)$$

Para $V \geq 50 \text{ mL}$ y parámetros positivos, $q(V) > 0$ y $B(V) > 0$, por lo que:

$$B'(V) < 0 \quad (11)$$

La monotonía es una propiedad estructural demostrada, no una estimación estadística.

3.4. Segunda derivada y curvatura

Aplicando la regla del producto:

$$B''(V) = [q(V)^2 - q'(V)]B(V), \quad q'(V) = -\frac{\alpha}{V^2} + k \quad (12)$$

En consecuencia,

$$B''(V) = \left[\left(\frac{\alpha}{V} + k(V - V_0) \right)^2 + \frac{\alpha}{V^2} - k \right] B(V) \quad (13)$$

La segunda derivada permite estudiar cambios de curvatura y evitar interpretar una pendiente negativa como curvatura necesariamente positiva.

3.5. Comportamiento asintótico

Como $\alpha > 0$ y $k > 0$:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{V_0}{V}\right)^\alpha = 0, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{k}{2}(V - V_0)^2\right] = 0 \quad (14)$$

por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{V \rightarrow \infty} B(V) = 0} \quad (15)$$

El límite matemático se refiere a la ecuación extrapolada; no demuestra la validez de la lectura del instrumento a diluciones indefinidas.

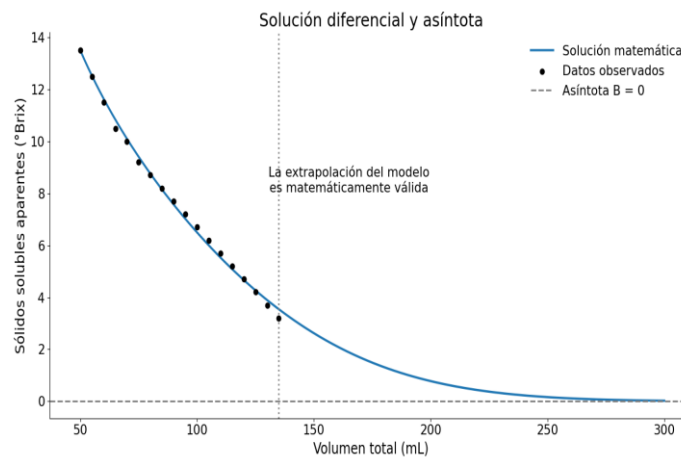


Figura 1. Solución diferencial y asíntota horizontal (visualización matemática).

La solución $B(V) = 13.5(50/V)^\alpha \exp\left[-\frac{k(V-50)^2}{2}\right]$ con α y k positivos, es positiva y decreciente para $V \geq 50$ mL y cumple $\lim_{V \rightarrow \infty} B(V) = 0$. La asíntota $B=0$ es un resultado analítico, no una concentración nula medida. La zona sombreada ($V > 135$ mL) corresponde a extrapolación fuera del dominio observado y no está validada experimentalmente. ISO 2173:2003 define el resultado refractométrico en términos de equivalencia con sacarosa y advierte que otras sustancias disueltas pueden producir resultados aproximados; por ello, la extrapolación a $B \approx 0$ no debe interpretarse como desaparición física de los solutos (ISO, 2003).

3.6. Índice de volumen °Brix y punto crítico

Se introduce exclusivamente como índice matemático $I(V) = V \cdot B(V)$. Su derivada es:

$$I'(V) = B(V) + VB'(V) = I(V) \left[\frac{1-\alpha}{V} - k(V - V_0) \right] \quad (16)$$

Para $0 < \alpha < 1$ y $k > 0$, el punto estacionario satisface:

$$kV(V - V_0) = 1 - \alpha \quad (17)$$

que equivale a la ecuación cuadrática:

$$V^2 - V_0V - \frac{1-\alpha}{k} = 0 \quad (18)$$

La raíz físicamente admisible es:

$$V^* = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 4(1-\alpha)/k}}{2} \quad (19)$$

Con los parámetros ajustados se obtiene aproximadamente $V^* = 70,60$ mL. Antes de ese punto la derivada del índice es positiva; después, negativa. El máximo observado en los datos resumidos aparece en 70 mL, con $I(70) = 700$ mL·°Brix. El índice no mide masa de solutos: los °Brix son una escala refractométrica y multiplicarlos por volumen no produce unidades de masa. El punto crítico es una propiedad de la función ajustada y su valor no constituye, por sí solo, una nueva ley física.

4. Resultados

4.1. Magnitud de la disminución experimental

Durante la dilución volumétrica mediante la adición de agua, la lectura pasó de 13,5 a 3,2 °Brix, equivalente a una disminución relativa del 76,30 %. El volumen total aumentó un 170 % respecto de los 50 mL iniciales. La serie presentó una tendencia estrictamente decreciente en las observaciones resumidas y se dispuso de tres mediciones por nivel para estimar la dispersión descriptiva. La distinción entre la medición refractométrica y la concentración real de solutos es fundamental para interpretar adecuadamente esta tendencia (ISO, 2003; Reid, 2003).

4.2. Comparación de formulaciones

Tabla 2. Comparación del desempeño de modelos para la trayectoria volumen °Brix del jugo de maracuyá.

Formulación	R ² descriptivo	RMSE (°Brix)
Referencia ideal	0,943799	0,704587
Ley potencial calibrada	0,958752	0,603618
Exponencial simple	0,993267	0,243880
Exponencial cuadrática	0,994607	0,218270
Diferencial propuesto	0,996677	0,171322

El modelo propuesto redujo el RMSE un 21,5 % respecto al modelo exponencial cuadrático. Sin embargo, este resultado no demuestra superioridad generalizable, debido al tamaño reducido de la muestra y a la evaluación de los cinco modelos sobre los mismos datos. Por ello, la selección debe considerar el análisis residual y las limitaciones experimentales (Bates & Watts, 1988; Burnham & Anderson, 2002; Hurvich & Tsai, 1989). La Tabla 3 presenta la concordancia entre observaciones y predicciones, mientras que la Figura 2 muestra el ajuste gráfico del modelo.

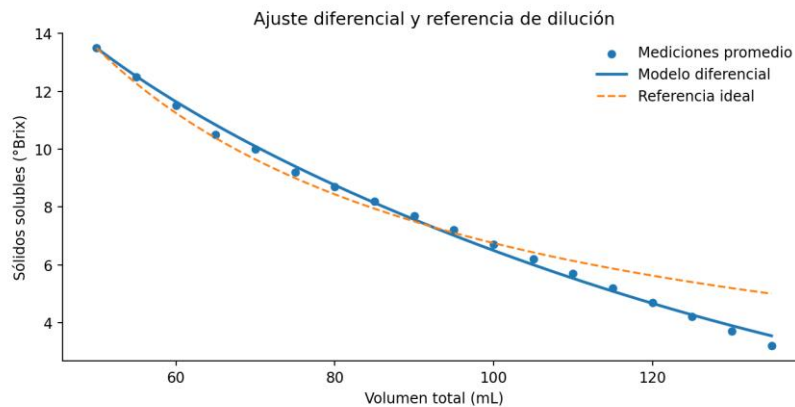


Figura 2. Ajuste diferencial y referencia ideal para la trayectoria volumen °Brix del jugo de maracuyá.

La Figura 2 evidencia que el modelo diferencial reproduce adecuadamente la trayectoria experimental de los sólidos solubles aparentes, alcanzando $R^2 = 0,996677$ y $RMSE = 0,171322$ °Brix, frente a 0,704587 °Brix de la referencia ideal, lo que representa una reducción del error del 75,7 %. Las mayores diferencias se presentan a volúmenes elevados, donde la referencia ideal sobreestima los valores experimentales. Por tanto, el

modelo propuesto ofrece una representación descriptiva más precisa de la relación volumen-°Brix dentro del intervalo experimental de 50 a 135 mL.

Concordancia entre valores experimentales y predicciones del modelo diferencial

La Tabla 3 presenta las 18 medias experimentales de °Brix, las predicciones del modelo diferencial y sus residuos ($e_i = B_{exp} - B_{mod}$). Este análisis complementa los indicadores R^2 y RMSE al identificar la magnitud y el signo de los errores durante la dilución, conforme a los procedimientos de evaluación de modelos de regresión no lineal (Bates & Watts, 1988; NIST/SEMATECH, 2002).

Tabla 3. Valores experimentales, valores predichos por la ecuación diferencial y residuos para los 18 niveles de volumen.

Volumen V (mL)	°Brix experimental	°Brix predicho B(V)	Residuo e_i (°Brix)
50	13,5	13,500	0,000
55	12,5	12,521	-0,021
60	11,5	11,641	-0,141
65	10,5	10,838	-0,338
70	10,0	10,097	-0,097
75	9,2	9,405	-0,205
80	8,7	8,756	-0,056
85	8,2	8,145	0,055
90	7,7	7,566	0,134
95	7,2	7,017	0,183
100	6,7	6,495	0,205
105	6,2	6,001	0,199
110	5,7	5,531	0,169
115	5,2	5,087	0,113
120	4,7	4,666	0,034
125	4,2	4,268	-0,068
130	3,7	3,894	-0,194

135	3,2	3,543	-0,343
-----	-----	-------	--------

El modelo reproduce adecuadamente la trayectoria experimental entre 50 y 135 mL, con residuos de $-0,343$ a $0,205$ °Brix y un elevado ajuste global ($R^2 = 0,996677$; $RMSE = 0,171322$ °Brix). Aunque satisface la condición inicial $B(50) = 13,5$ °Brix, los residuos presentan un patrón sistemático compatible con dependencia serial (Durbin-Watson $\approx 0,43$). Por ello, el diagnóstico residual resulta fundamental para evaluar la adecuación del modelo (Bates & Watts, 1988; NIST/SEMATECH, 2002). Asimismo, el buen ajuste debe interpretarse dentro del intervalo experimental, sin atribuir necesariamente un mecanismo fisicoquímico a la formulación matemática (van Boekel, 2008).

4.3. Velocidad de variación y curvatura

La primera derivada cuantifica la tasa de disminución de los sólidos solubles aparentes (°Brix) respecto al volumen, mientras que la segunda describe la variación de dicha tasa. Ambas se obtienen directamente de la solución analítica, sin recurrir a aproximaciones numéricas. Su interpretación debe considerar la calidad del ajuste y los límites del dominio experimental (Bates & Watts, 1988; Chen et al., 2026; Seber & Wild, 1989; van Boekel, 2008).

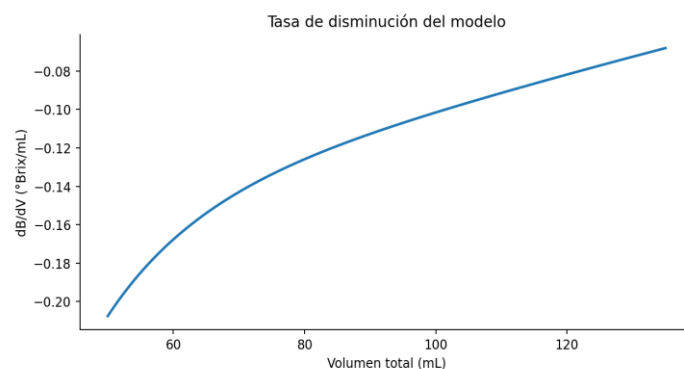


Figura 3. Derivada del modelo.

La tasa (dB/dV) permanece negativa en todo el dominio evaluado, confirmando analíticamente el carácter monótono decreciente de la solución. Sin embargo, su magnitud disminuye progresivamente con el aumento del volumen, evidenciando que la respuesta de °Brix a cada incremento de dilución se atenúa conforme avanza la adición

de agua. Este comportamiento constituye una propiedad intrínseca de la dinámica descrita por la EDO y revela una respuesta no lineal de la trayectoria volumen °Brix.

4.4. Punto crítico y alcance de su interpretación

La solución analítica de V^* permitió identificar un máximo del índice ajustado de 70,60 mL, cercano al valor observado de 70 mL. Sin embargo, esta concordancia corresponde a la muestra de calibración y no constituye una validación independiente. Asimismo, el máximo de $V \cdot B(V)$ no implica creación ni desaparición de solutos, por lo que su interpretación debe considerar las condiciones de medición refractométrica, densidad, temperatura y homogeneización de la muestra (ISO, 2003; Reid, 2003).

4.5. Comparación física con la dilución ideal

A 135 mL, la referencia ideal predice 5,0 °Brix, frente a los 3,2 °Brix observados, lo que representa una diferencia del 36 %. Esta desviación evidencia las limitaciones de la aproximación ideal, pero no demuestra pérdida de masa de solutos, dado que los °Brix constituyen una medida refractométrica influida por la composición de la matriz alimentaria (Fonseca et al., 2022; ISO, 2003; Reid, 2003).

4.6. Diagnóstico residual y capacidad predictiva

Los residuos presentan un estadístico de Durbin–Watson de 0,4285 y una autocorrelación de primer rezago cercana a 0,77, valores compatibles con dependencia serial positiva. Por tanto, un R^2 elevado no garantiza independencia residual ni validez inferencial (Durbin & Watson, 1951). El diagnóstico gráfico permite identificar patrones no explicados por el modelo (Bates & Watts, 1988; Heckert et al., 2002). En consecuencia, el análisis conserva un enfoque descriptivo, sin incorporar un modelo autorregresivo de primer orden (AR(1)).

Tabla 4. Evaluación predictiva del modelo mediante validación cronológica.

Primeras observaciones usadas para ajustar	Últimas reservadas	RMSE de prueba (°Brix)
12	6	0,6722
14	4	0,5569

15	3	0,5101
----	---	--------

El error en las particiones de prueba superó al del ajuste global ($RMSE = 0,1713$ °Brix), lo que sugiere limitaciones en la capacidad de generalización del modelo y la necesidad de validación adicional para su aplicación predictiva. La partición cronológica permitió una evaluación interna respetando el orden de las observaciones, sin constituir una validación externa (Bergmeir et al., 2018).

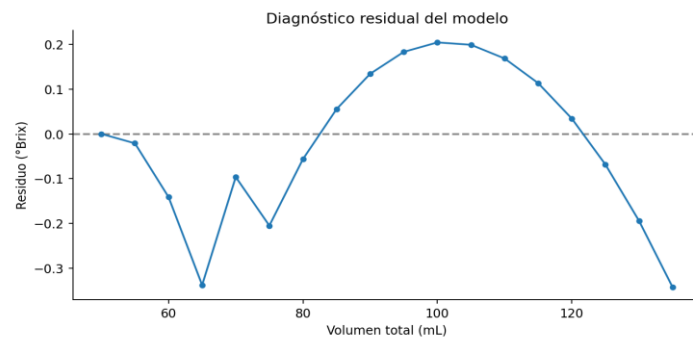


Figura 4. Residuos frente al volumen

Los residuos del modelo presentan magnitudes reducidas, pero muestran un patrón sistemático de valores negativos al inicio y al final, y positivos en la región intermedia, compatible con autocorrelación serial positiva (Durbin-Watson $\approx 0,43$). Aunque el modelo alcanza un elevado ajuste descriptivo ($R^2 = 0,996677$; $RMSE = 0,171322$ °Brix), la estructura residual evidencia variaciones no explicadas y limita su capacidad predictiva sin validación adicional.

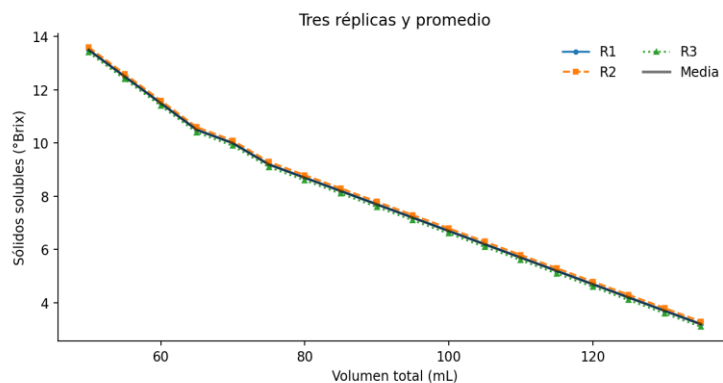


Figura 5. Trayectorias experimentales de las réplicas y promedio de dilución.

Las tres réplicas experimentales y sus promedios muestran la evolución de los sólidos solubles aparentes (°Brix) durante la dilución del jugo de maracuyá. El modelo diferencial presentó un elevado ajuste global ($R^2 = 0,996677$; $RMSE = 0,171322$ °Brix); sin embargo, los residuos evidenciaron un patrón compatible con autocorrelación serial positiva (Durbin-Watson $\approx 0,43$), lo que limita las inferencias basadas en la independencia de los errores (Durbin & Watson, 1951). Por ello, el análisis residual resulta fundamental para identificar patrones sistemáticos no reflejados en los indicadores globales de ajuste (Bates & Watts, 1988; Heckert et al., 2002).

4.7. Temperatura e identificabilidad

La temperatura presentó variaciones limitadas y covariación con el proceso de dilución. Dado que no fue manipulada independientemente del volumen y el tiempo, los datos no permiten establecer un efecto térmico causal. Por ello, la incorporación de covariables requiere evaluar su identificabilidad estructural y práctica (Raue et al., 2009). En consecuencia, la representación gráfica de la temperatura es exclusivamente descriptiva y no constituye una superficie de respuesta validada experimentalmente.

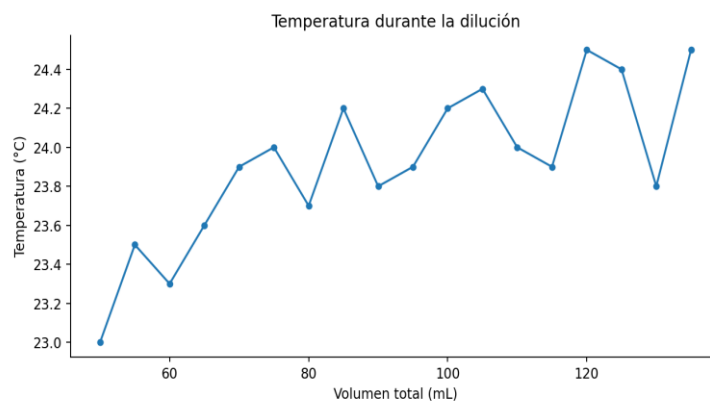


Figura 6. Registro de temperatura y °Brix durante la dilución.

La figura 6, se interpreta exclusivamente como una representación descriptiva de la evolución de la temperatura durante el proceso de dilución y no como evidencia de un efecto causal de la temperatura sobre los sólidos solubles aparentes

4.8. Aporte metodológico y limitaciones

El aporte científico comprobable del estudio reside en integrar tres componentes: (i) un modelo diferencial fenomenológico de dos parámetros con variable independiente volumen total y condición inicial fijada por medición; (ii) una solución analítica que permite demostrar positividad, decrecimiento y comportamiento asintótico para parámetros positivos; y (iii) una confrontación cuantitativa con referencias alternativas usando los datos experimentales obtenidos en el estudio y análisis explícito de residuos. Se trata de una contribución aplicada y verificable en esta matriz alimentaria; no se afirma prioridad mundial de la forma funcional ni identificación causal de mecanismos fisicoquímicos.

4.9. Análisis de sensibilidad y estabilidad matemática

La sensibilidad local permite separar la respuesta de la ecuación ante cambios de parámetros de la incertidumbre estadística de sus estimaciones. A volumen fijo, la derivada respecto de α es:

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = B(V) \ln \left(\frac{50}{V} \right) \quad (20)$$

La derivada respecto de k es:

$$\frac{\partial B}{\partial k} = -\frac{(V-50)^2}{2} B(V) \quad (21)$$

Para evitar comparar parámetros con unidades distintas, se consideran elasticidades adimensionales:

$$S_{\alpha}(V) = \frac{\alpha}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \alpha \ln \left(\frac{50}{V} \right) \quad (22)$$

$$S_k(V) = \frac{k}{B} \frac{\partial B}{\partial k} = -\frac{k}{2} (V - 50)^2 \quad (23)$$

Ambas elasticidades se anulan en $V = 50$ mL y aumentan en magnitud conforme se añada agua, reflejando la sensibilidad local de la solución ante variaciones paramétricas (Savatorova, 2023). Sin embargo, este incremento no demuestra mecanismos físicos específicos ni garantiza la estabilidad de las estimaciones en nuevos experimentos. Por ello, la identificabilidad y la incertidumbre paramétrica requieren validación experimental adicional (Raue et al., 2009).

4.10. Coherencia dimensional, validez e implicaciones para ingeniería

El análisis dimensional confirma que α es adimensional y k presenta unidades de mL^{-2} , garantizando la consistencia matemática del modelo, cuyos términos diferenciales tienen unidades de mL^{-1} . La referencia ideal de dilución no representa directamente la conservación de masa de solutos, dado que los °Brix constituyen una medida refractométrica convencional influida por la composición de la muestra (ISO, 2003). Aunque las tres réplicas permiten evaluar la variabilidad experimental, la dependencia serial de los residuos limita la inferencia estadística. Por tanto, las desviaciones observadas no deben atribuirse a mecanismos fisicoquímicos sin validación experimental adicional.

5. Discusión

El modelo propuesto presenta un bajo error de ajuste y una solución analítica explícita con propiedades matemáticas demostrables; sin embargo, su capacidad predictiva fuera del intervalo experimental no ha sido validada. Por ello, la extrapolación asintótica debe identificarse como «Proyección matemática del modelo», diferenciándola de los datos observados. Asimismo, los patrones sistemáticos de los residuos, representados en la Figura 3, exigen cautela en las inferencias basadas en la independencia de los errores (Bates & Watts, 1988; Heckert et al., 2002). En consecuencia, los resultados deben interpretarse dentro del dominio experimental y considerando las limitaciones metodológicas.

Los estudios previos destacan la importancia de los sólidos solubles en el procesamiento del maracuyá. Assawarachan y Tantikul (2025) modelaron la conductividad eléctrica durante el calentamiento óhmico, mientras que Bautista Vega y Olivares Muñoz (2022) analizaron formulaciones de néctar mediante evaluaciones fisicoquímicas y sensoriales. A diferencia de estos trabajos, el presente estudio propone una ecuación diferencial ordinaria basada en el volumen total, con solución analítica explícita, propiedades de positividad y monotonía, y evaluación computacional frente a modelos alternativos. Su contribución es metodológica y descriptiva, limitada al intervalo experimental de 50 a 135 mL, sin atribuir mecanismos fisicoquímicos ni

conservación de masa al producto $V \cdot B(V)$. La revisión bibliográfica no identificó formulaciones equivalentes entre los antecedentes examinados, lo que sugiere una aportación metodológica potencialmente original, sin afirmar una primacía absoluta en la literatura científica.

$$B(50) = 13.5 \quad (24)$$

La contribución del estudio se fundamenta en cuatro aspectos: la formulación de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) que relaciona el volumen total (50–135 mL) con los sólidos solubles aparentes ($^{\circ}\text{Brix}$), utilizando 18 niveles experimentales con tres observaciones por nivel; la obtención de una solución analítica explícita con propiedades demostrables de positividad, monotonía y comportamiento asintótico; la evaluación cuantitativa del modelo ($R^2 = 0,996677$; $\text{RMSE} = 0,171322$ $^{\circ}\text{Brix}$), con reducciones del RMSE del 75,7 % y 21,5 % respecto a la referencia ideal y al modelo exponencial cuadrático, respectivamente; y el diagnóstico residual, cuyo estadístico de Durbin–Watson ($\approx 0,429$) indica posible autocorrelación serial positiva, limitando la inferencia estadística (Durbin & Watson, 1951; Heckert et al., 2002). Estos resultados evidencian una elevada capacidad descriptiva dentro del intervalo estudiado, sin constituir validación externa ni demostrar mecanismos fisicoquímicos.

La contribución metodológica radica en integrar una EDO de dos parámetros, solución analítica, estimación computacional, análisis de sensibilidad, comparación de modelos y evaluación residual y predictiva. La revisión bibliográfica no identificó formulaciones equivalentes aplicadas específicamente a la relación volumen– $^{\circ}\text{Brix}$ durante la dilución del jugo de maracuyá, lo que respalda una originalidad potencial dentro de los antecedentes examinados, sin atribuir prioridad absoluta en la literatura científica.

$$\lim_{V \rightarrow \infty} B(V) = 0 \quad (25)$$

6. Conclusiones

El estudio establece una formulación diferencial fenomenológica para representar la evolución de los sólidos solubles aparentes durante la dilución volumétrica con agua del jugo de maracuyá (*Passiflora edulis*). La EDO propuesta admite una solución analítica

explícita y, para parámetros positivos, garantiza positividad y monotonía decreciente, además de permitir examinar sensibilidad, curvatura y comportamiento asintótico. En las 18 medias experimentales, el modelo alcanzó ($R^2=0,996677$) y $RMSE = 0,171322$ °Brix. El RMSE fue aproximadamente 75,7 % menor que el de la referencia ideal simplificada y 21,5 % menor que el de la alternativa exponencial cuadrática, lo que constituye el principal hallazgo cuantitativo del estudio dentro del intervalo evaluado. La revisión bibliográfica dirigida mostró antecedentes de modelado de otras propiedades del jugo de maracuyá y estudios experimentales de dilución, pero no identificó una EDO equivalente para describir directamente la trayectoria °Brix volumen; por ello, la formulación aporta una novedad metodológica contextualizada y defendible. El máximo del índice volumen °Brix próximo a 70,6 mL constituye una propiedad matemática derivada y no una medición de masa de solutos. La autocorrelación residual (Durbin-Watson $\approx 0,43$) delimita la inferencia estadística y señala la necesidad de validación posterior con nuevos lotes. En conjunto, el trabajo aporta datos experimentales, una formulación diferencial reproducible, una solución analítica, una evaluación computacional comparativa y una delimitación explícita de su dominio de aplicación, proporcionando una base rigurosa para extender el modelado matemático de procesos de dilución en matrices alimentarias.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses personales, profesionales, académicos, institucionales o financieros que hayan podido influir en el diseño, desarrollo y ejecución de la investigación, así como en el análisis e interpretación de los resultados y la elaboración del presente manuscrito. Asimismo, manifiestan que el estudio se realizó bajo principios de independencia, objetividad, integridad y transparencia científica.

Financiamiento

Los autores declaran que la presente investigación no recibió financiamiento de organismos públicos, instituciones privadas ni entidades nacionales o internacionales. El estudio fue desarrollado mediante autofinanciamiento, con recursos propios de los

autores, quienes asumieron los costos asociados a su ejecución, desde el diseño metodológico y la recopilación de datos hasta el análisis de los resultados y la preparación del manuscrito.

Declaración sobre inteligencia artificial

Los autores declaran que utilizaron herramientas de inteligencia artificial generativa exclusivamente como apoyo complementario en tareas de revisión lingüística, corrección gramatical y mejora de la redacción académica del manuscrito, incluida la traducción y revisión del resumen en inglés. Estas herramientas no intervinieron en la formulación del problema de investigación, el diseño metodológico, la recopilación y el análisis de los datos, la interpretación de los resultados ni la elaboración de las conclusiones. Asimismo, los autores manifiestan que todas las decisiones académicas y científicas, así como la revisión y validación final del contenido, fueron realizadas bajo su supervisión y responsabilidad. En consecuencia, asumen íntegramente la responsabilidad por la originalidad, precisión, integridad y rigurosidad científica del manuscrito.

Aporte de los autores

Guilber Vergara Vélez: Conceptualización de la investigación, formulación del problema científico, elaboración del resumen y la introducción, coordinación general del estudio, supervisión del desarrollo metodológico, integración de los resultados y revisión crítica de la versión final del manuscrito.

Fabián Redrován Castillo: Diseño y desarrollo de la metodología, definición de los procedimientos experimentales, recopilación y organización de los datos, así como participación en la validación metodológica del estudio.

Bertha Mazón Olivo: Revisión de literatura científica, elaboración y fundamentación teórica de la introducción, análisis e interpretación de los resultados y participación en la redacción de la discusión científica.

Wilmer Rivas Asanza: Desarrollo y resolución analítica del modelo diferencial, formulación matemática, estimación computacional de parámetros, evaluación de las propiedades matemáticas del modelo y elaboración de los resultados correspondientes.

Johnny Novillo Vicuña: Análisis e interpretación de los resultados, comparación del modelo propuesto con formulaciones alternativas, elaboración de la discusión y las conclusiones, y revisión crítica del contenido científico del manuscrito.

Referencias

Assawarachan, R., & Tantikul, S. (2025). Modeling the effects of temperature and total soluble solids on electrical conductivity of passion fruit juice during ohmic heating. *Processes*, 13(5), Article 1324. <https://doi.org/10.3390/pr13051324>

Bates, D. M., & Watts, D. G. (1988). *Nonlinear regression analysis and its applications*. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9780470316757>

Bautista Vega, A., & Olivares Muñoz, S. V. (2022). Dilución y concentración de Theobroma cacao L. en las características del néctar de Passiflora edulis. *Revista Científica UNTRM: Ciencias Naturales e Ingeniería*, 5(2), 24–30. <https://doi.org/10.25127/ucni.v5i1.885>

Bergmeir, C., Hyndman, R. J., & Koo, B. (2018). A note on the validity of cross-validation for evaluating autoregressive time series prediction. *Computational Statistics & Data Analysis*, 120, 70–83. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2017.11.003>

Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2002). *Model selection and multimodel inference: A practical information-theoretic approach* (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/b97636>

Chen, S., Qin, Z., Wang, T., Zhang, J., Zhang, R., Zou, Y., & Shi, J. (2026). Modeling and simulation of mass transfer in food processing: Recent advances in governing equations, workflow, and applications. *Foods*, 15(12), Article 2084. <https://doi.org/10.3390/foods15122084>

Codex Alimentarius Commission. (2025). General standard for fruit juices and nectars (CXS 247-2005; versión con enmiendas hasta 2025). FAO/WHO. <https://www.fao.org/fao-who-codexalimentarius/>

Datta, A. K. (2008). Status of physics-based models in the design of food products, processes, and equipment. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*, 7(1), 121–129. <https://doi.org/10.1111/j.1541-4337.2007.00030.x>

Durbin, J., & Watson, G. S. (1951). Testing for serial correlation in least squares regression. II. *Biometrika*, 38(1–2), 159–178. <https://doi.org/10.1093/biomet/38.1-2.159>

Farid, M. M. (Ed.). (2010). *Mathematical modeling of food processing*. CRC Press.

Fonseca, A. M. A., Geraldi, M. V., Maróstica Junior, M. R., Silvestre, A. J. D., & Rocha, S. M. (2022). Purple passion fruit (*Passiflora edulis* f. *edulis*): A comprehensive review on the nutritional value, phytochemical profile and associated health effects. *Food Research International*, 160, Article 111665. <https://doi.org/10.1016/j.foodres.2022.111665>

Hanna Instruments. (s. f.). Digital refractometer for refractive index and Brix – HI96800. <https://hannainst.com/hi96800-digital-refractometer-for-refractive-index-and-brix.html>

Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M. H., Brett, M., Haldane, A., Fernández del Río, J., Wiebe, M., Peterson, P., . . . Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825), 357–362. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>

Heckert, N. A., Filliben, J. J., Croarkin, C. M., Hembree, B., Guthrie, W. F., Tobias, P., & Prinz, J. (2002). *Handbook 151: NIST/SEMATECH e-handbook of statistical methods*. National Institute of Standards and Technology. <https://www.nist.gov/publications/handbook-151-nistsematech-e-handbook-statistical-methods>

Ho, Q. T., Carmeliet, J., Datta, A. K., Defraeye, T., Delele, M. A., Herremans, E., Opara, L., Ramon, H., Tijskens, E., van der Sman, R., Van Liedekerke, P., Verboven, P., & Nicolai, B.

- M. (2013). Multiscale modeling in food engineering. *Journal of Food Engineering*, 114(3), 279–291. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2012.08.019>
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
- Hurvich, C. M., & Tsai, C.-L. (1989). Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 76(2), 297–307. <https://doi.org/10.1093/biomet/76.2.297>
- Hyndman, R. J., & Koehler, A. B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, 22(4), 679–688. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2006.03.001>
- International Organization for Standardization. (2003). Fruit and vegetable products—Determination of soluble solids—Refractometric method (ISO Standard No. 2173:2003). <https://www.iso.org/standard/35851.html>
- Marquardt, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2), 431–441. <https://doi.org/10.1137/0111030>
- Raue, A., Kreutz, C., Maiwald, T., Bachmann, J., Schilling, M., Klingmüller, U., & Timmer, J. (2009). Structural and practical identifiability analysis of partially observed dynamical models by exploiting the profile likelihood. *Bioinformatics*, 25(15), 1923–1929. <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btp358>
- Rauh, C., & Delgado, A. (2015). Different modelling and simulation approaches for food processing operations. In *Modeling food processing operations* (pp. 3–33). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1016/B978-1-78242-284-6.00001-5>
- Reid, D. S. (2003). Traditional indirect methods for estimation of water content: Measurement of °Brix. *Current Protocols in Food Analytical Chemistry*, 10(1), A1.4.1–A1.4.5. <https://doi.org/10.1002/0471142913.faa0104s10>

Savatorova, V. (2023). Exploring parameter sensitivity analysis in mathematical modeling with ordinary differential equations. *CODEE Journal*, 16(1), Article 4. <https://doi.org/10.5642/codee.CZKZ5996>

Seber, G. A. F., & Wild, C. J. (1989). *Nonlinear regression*. Wiley. <https://doi.org/10.1002/0471725315>

Senter, S. D., Payne, J. A., Knight, R. J., & Amis, A. A. (1993). Yield and quality of juice from passion fruit (*Passiflora edulis*), maypops (*P. incarnata*) and tetraploid passion fruit hybrids. *Journal of the Science of Food and Agriculture*, 62, 67–70. <https://doi.org/10.1002/jsfa.2740620109>

Trystram, G. (2012). Modelling of food and food processes. *Journal of Food Engineering*, 110(2), 269–277. <https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2011.05.001>

van Boekel, M. A. J. S. (2008). Kinetic modeling of food quality: A critical review. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*, 7(1), 144–158. <https://doi.org/10.1111/j.1541-4337.2007.00036.x>

Viera, W., Brito, B., Zambrano, E., Ron, L., Merino, J., Campaña, D., & Álvarez, H. (2020). Genotype × environment interaction in the yield and fruit quality of passion fruit germplasm grown in the Ecuadorian Littoral. *International Journal of Fruit Science*, 20(sup3), S1829–S1844. <https://doi.org/10.1080/15538362.2020.1834897>

Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., Haberland, M., Reddy, T., Cournapeau, D., Burovski, E., Peterson, P., Weckesser, W., Bright, J., van der Walt, S. J., Brett, M., Wilson, J., Millman, K. J., Mayorov, N., Nelson, A. R. J., Jones, E., Kern, R., Larson, E., Van Mulbregt, P. (2020). SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17(3), 261–272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>